Concours Spé. de Recrutement aux G.E. session 1987

CSGE ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE T'

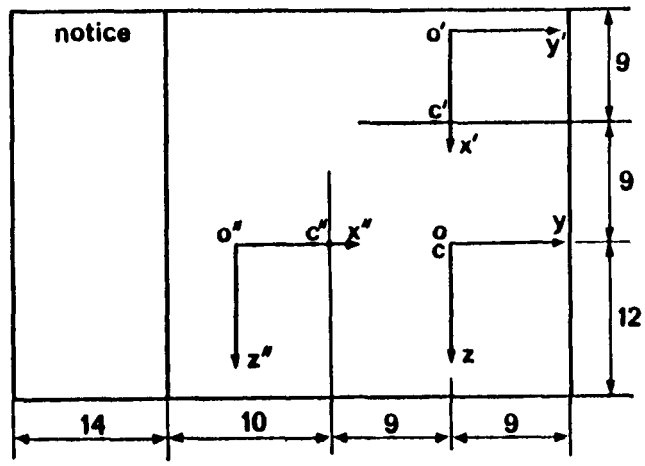
Durée : 4 heures

Le candidat devra remettre une épure avec notice sur l'épure en réponse aux questions 3°, 6° A, 7° A, et une ou plusieurs copies pour les autres questions.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

Dans tout le problème l'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées étant notées x, y, z. L'unité de longueur est le cm. Le réel positif a vaudra 8 sur l'épure. Le plan horizontal de projection est le plan d'équation $x = 8$. On utilisera deux plans frontaux de projection : le premier sur lequel la projection d'un point M sera notée m' est le plan d'équation $z = -9$; le second sur lequel la projection de M sera notée m'' est le plan d'équation $y = -9$.

L'épure, placée dans le sens de la largeur, se présentera donc ainsi :



On considère les points A (0, 0, a); B (0, 0, $-a$); C (a, 0, 0); S (a, a, 0). Le cercle (C) est situé dans le plan $x = a$, a pour centre C et pour rayon a.

Un triangle variable PQR est tel que son plan reste parallèle au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, R décrivant le segment AB, P et Q décrivant le cercle (C) avec $y(Q) = -y(P) \geqslant 0$.

Les segments RP et RQ engendrent donc une portion de surface réglée notée Σ.

Les points intérieurs au triangle PQR engendrent un domaine noté D.

1° Calculer le volume de D et la position de son centre d'inertie G en supposant D homogène.

2° Montrer que l'application $(t, \theta) \longmapsto M(x = t, y = t\cos\theta, z = a\sin\theta)$ de $\Delta = [0, a] \times]-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique de Σ.

Indiquer une équation cartésienne de Σ et les inéquations qui la complètent éventuellement.

Tournez la page S. V. P.

3° On coupe Σ par le plan d'équation $x = h$, avec $0 < h < a$. Démontrer graphiquement ou analytiquement que la section est une ellipse dont on précisera l'ensemble des foyers quand h varie. *Tracer sur l'épure* en prenant $h = 3$ les 3 projections d'un point E de cette ellipse ainsi que les projections de la tangente en E à l'ellipse. On prendra y (E) < 0 et z (E) > 0. Tracer les 3 projections du foyer F tel que z (F) > 0.

4° On considère la surface réglée constituée des normales à Σ aux points de l'ellipse intersection de Σ avec le plan d'équation $x = \frac{a}{2}$. Déterminer les intersections de cette surface avec les plans $y = 0$ et $z = 0$. On précisera la nature géométrique de ces intersections.

5° On coupe Σ par le cylindre de révolution d'équation $x^2 + z^2 = a^2$. Déterminer la nature géométrique des projections de cette intersection sur les 3 plans de coordonnées.

6° A. *Épure* ;

— Tracer l'intersection $\Gamma = (\gamma, \gamma', \gamma'')$ de Σ avec le cylindre elliptique d'équation $4x^2 + z^2 - 4ax = 0$;

— Construire par les méthodes de la descriptive les points M et N de Γ situés dans le plan $z = -6$ tels que y (M) < 0 et y (N) < 0, ainsi que les tangentes à Γ en ces points (*notice*);

— Représenter le solide, supposé opaque, constitué des points de D situés à l'intérieur du cylindre elliptique et tels que $z \leqslant 0$;

B. *Calcul* :

— Déterminer la nature géométrique de γ';

— Calculer le volume du solide représenté.

7° On cherche les points de Σ où le plan tangent passe par S. Cet ensemble est constitué du segment OS et d'une courbe L. Le cône de sommet S et de directrice L, qui est donc circonscrit à Σ, a pour base dans le plan $x = 0$ une courbe L_1.

A. *Épure* :

— Construire le point U $= (u, u')$ de L situé dans le plan $z = 6$ (*notice*).

— Construire le point V $= (v, v')$ de L_1 situé sur SU ainsi que la tangente en V à L_1 (*notice*).

B. *Calcul* :

— Déterminer une représentation paramétrique de L. Quelle est la nature géométrique de la projection de L sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$?

— Déterminer une représentation paramétrique de L_1 et la tracer dans le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

• • •
•